STATISTIK I – Lösung 06
Schiefe und Wölbung

An einer Fertigungsanlage werden 20 Polymerbauteile als Zufallsstichprobe aus der laufenden Produktion entnommen und gewogen. Die (absoluten) Abweichungen von einem produktionstechnisch bedingten Idealgewicht in Gramm werden in einer Tabelle festgehalten.

Bauteil	Abweichung	Bauteil	Abweichung
1	12	11	20
2	27	12	17
3	13	13	19
4	10	14	21
5	7	15	30
6	5	16	44
7	11	17	56
8	23	18	8
9	12	19	7
10	11	20	3

a) Berechnen Sie den Momentenkoeffizienten der Schiefe.

Zunächst wird die bereits bekannte Hilfstabelle mit zwei zusätzlichen Spalten angelegt.

Bauteil	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$
1	12	33,64	-195,11
2	27	84,64	778,69
3	13	23,04	-110,59
4	10	60,84	-474,55
5	7	116,64	-1259,71
6	5	163,84	-2097,15
7	11	46,24	-314,43
8	23	27,04	140,61
9	12	33,64	-195,11
10	11	46,24	-314,43
11	20	4,84	10,65
12	17	0,64	-0,51
13	19	1,44	1,73
14	21	10,24	32,77
15	30	148,84	1815,85
16	44	686,44	17984,73
17	56	1459,24	55742,97
18	8	96,04	-941,19
19	7	116,64	-1259,71
20	3	219,04	-3241,79
∑	356	3379,20	66103,68
Ø	17,8	168,96	3305,18

Auf Basis der tabellierten Werte ermittelt sich der Momentenkoeffizient der Schiefe wie folgt:

$$g_m = \frac{m_3}{s^3} = \frac{3305{,}18}{2196{,}22} = 1{,}50$$

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3 = 3305{,}18$$

$$s^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)^3 = \sqrt{168{,}96}^3 = 2196{,}22$$

Der Momentenkoeffizient der Schiefe liegt bei 1,50 – die Verteilung ist somit linkssteil.

b) Berechnen Sie den Quartilskoeffizienten der Schiefe.

Der Quartilskoeffizient der Schiefe berechnet sich aus den drei Quartilswerten.

Die geordnete Verteilung: 3; 5; 7; 7; 8; 10; 11; 11; 12; 12; 13; 17; 19; 20; 21; 23; 27; 30; 44; 56

Ergibt (n * p) einen ganzzahligen Wert (k), berechnet sich das Perzentil wie folgt:

$$x_p = \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)})$$

(n*p) = (20 * 0,25) = 5 -> k = 5; k+1 = 6 -> xp = (8+10)/2 = 9
(n*p) = (20 * 0,50) = 10 -> k = 10; k+1 = 11 -> xp = (12+13)/2 = 12,5
(n*p) = (20 * 0,75) = 15 -> k = 15; k+1 = 16 -> xp = (21+23)/2 = 22

$$g_{0,25} = \frac{(x_{0,75} - x_{med}) - (x_{med} - x_{0,25})}{x_{0,75} - x_{0,25}} = \frac{(22-12{,}5)-(12{,}5-9)}{(22-9)} = \frac{6}{13} = 0{,}46$$

Auch hier ergibt sich ein positiver Wert – die Verteilung ist somit linkssteil.

c) Berechnen Sie die Kurtosis.

Auch für die Berechnung der Kurtosis wird zunächst eine Hilfstabelle angelegt.

Bauteil	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^4$
1	12	33,64	1131,65
2	27	84,64	7163,93
3	13	23,04	530,84
4	10	60,84	3701,51
5	7	116,64	13604,89
6	5	163,84	26843,55
7	11	46,24	2138,14
8	23	27,04	731,16
9	12	33,64	1131,65
10	11	46,24	2138,14
11	20	4,84	23,43
12	17	0,64	0,41
13	19	1,44	2,07
14	21	10,24	104,86
15	30	148,84	22153,35
16	44	686,44	471199,87

17	56	1459,24	2129381,38
18	8	96,04	9223,68
19	7	116,64	13604,89
20	3	219,04	47978,52
∑	356	3379,20	2752787,90
Ø	17,8	168,96	137639,40

$$g_k = \frac{m_4}{s^4} - 3 = \frac{137639{,}40}{28547{,}48} - 3 = 1{,}82$$

$$m_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^4 = 137639{,}40$$

$$s^4 = \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)^4 = \sqrt{168{,}96}^4 = 28547{,}48$$

Der positive Wert der Kurtosis weist auf einen im Vergleich zur Wölbung der Normalverteilung spitzeren Verlauf der Verteilung hin.