▲ Hochschule Harz
Hochschule für angewandte Wissenschaften

Statistik II
Exkurs: Wahrscheinlichkeitslehre, Mengenlehre und Kombinatorik

Christian Reinboth, Dipl.-Wi.Inf.(FH)

Sommersemester 2016

Bachelorstudiengang Betriebswirtschaftslehre

Bachelorstudiengang Wirtschaftsingenieurwesen

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitslehre

- **Zufallsvorgang**: Ein Zufallsvorgang ist ein Vorgang, der in einem von mehreren möglichen Ergebnissen mündet, die sich wiederum gegenseitig ausschließen. Welches Ereignis eintritt, kann vorab nicht mit Sicherheit ausgesagt werden.

- **Zufallsexperiment**: Ein Zufallsexperiment ist die (beliebig häufige) Wiederholung eines Zufallsvorgangs unter kontrollierten, gleich bleibenden Rahmenbedingungen

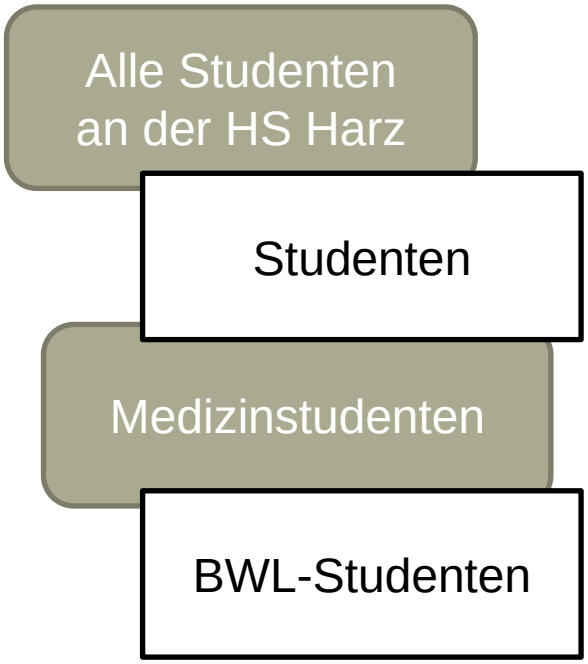
- Typische Beispiele für Zufallsexperimente
  - „Kopf oder Zahl“-Spiel mit einer fairen Münze
  - Würfeln mit einem (oder mehreren) fairen Würfeln
  - Lauf einer Kugel durch den Kessel beim Roulettespiel
  - Ziehung von Lottozahlen (ohne Zurücklegen) aus einer Trommel
  - Ziehen von Karten (mit oder ohne Zurücklegen) aus einem Kartenstapel
  - Ziehen von schwarzen/weißen Kugeln (mit oder ohne Zurücklegen) aus einer Urne

Ist die „zufällige“ Auswahl von Passanten ebenfalls ein Zufallsexperiment?

Grundbegriffe der Mengenlehre

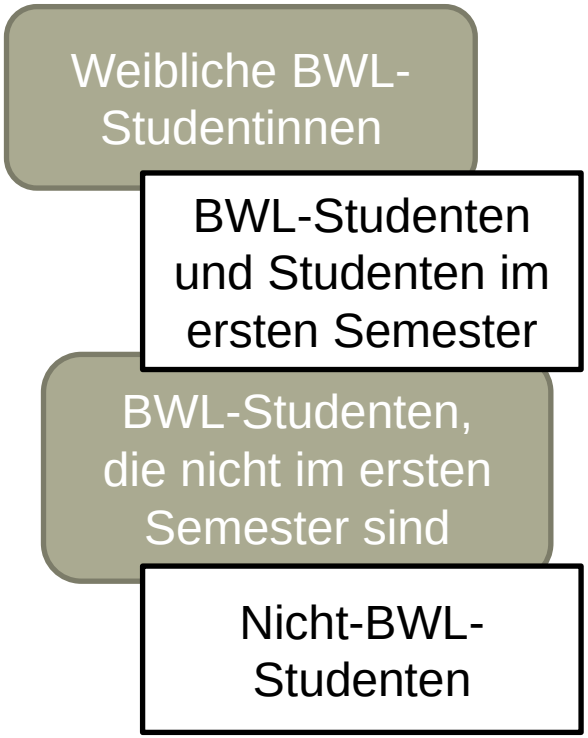
– Um die **Ergebnisse von Zufallsexperimenten** beschreiben zu können, wird nachfolgend auf das Vokabular der **Mengenlehre** zurückgegriffen

- **Menge**
  = Eine Gruppe von Elementen (Ω)
- **Elemente**
  = Einzelne Mitglieder einer Menge
  (nicht teilbare Elementarereignisse)
- **Leere Menge**
  = Eine Menge ohne ein Element (∅)
- **Teilmenge**
  = Eine Untermenge einer anderen Menge
  (z.B. A ist eine Teilmenge von Ω: $A \subseteq \Omega$)



Grundbegriffe der Mengenlehre

- **Schnittmenge**
  = Eine Menge aller Elemente, die zugleich in zwei Mengen (A und B) enthalten sind
- **Vereinigungsmenge**
  = Eine Menge aller Elemente, die entweder in A oder B (oder in A und B) enthalten sind
- **Differenzmenge**
  = Eine Menge aller Elemente, die zwar in einer Menge (A), zugleich aber nicht in einer anderen Menge (B) enthalten sind
- **Komplementärmenge**
  = Eine Menge aller Elemente, die nicht zu einer anderen Menge (A) gehören (d.h. der Rest des Ereignisraums G)



Logische Operatoren und Mengen

– **Logisches UND (Konjunktion, A∩B)**

Menge A	Menge B	UND
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Wahrheitstabelle

– **Logisches ODER (Disjunktion, A∪B)**

Menge A	Menge B	ODER
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Logische Operatoren und Mengen

– **Logisches NICHT (Negation, Ā)**

Menge A	NICHT
W	F
F	W

– Wie lassen sich zentrale Begriffe mit Operatoren ausdrücken?

  – Schnittmenge von A und B: $A \cap B$
  – Vereinigungsmenge von A und B: $A \cup B$
  – Differenzmenge von A und B: $A \setminus B$
  – Komplementärmenge von A: $\bar{A}$

Regeln für das Rechnen mit Mengen

– **Kommutativgesetz**

Die Argumente einer kommutativen Operation können vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert

Beispiel: $1 + 2 = 2 + 1$

$1 * 2 = 2 * 1$

– Das Kommutativgesetz in der Mengenlehre:

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

Regeln für das Rechnen mit Mengen

– **Assoziativgesetz**

Eine zweistellige Verknüpfung ist assoziativ, wenn die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt (die Klammersetzung ist somit beliebig)

Beispiel: $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$

$(1 * 2) * 3 = 1 * (2 * 3)$

– Das Assoziativgesetz in der Mengenlehre:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Regeln für das Rechnen mit Mengen

– **Distributivgesetz**

Das Distributivgesetz regelt die Auflösung von Klammern (z.B. durch Ausmultiplikation)

Beispiel: $(1 + 2) * 3 = (1 * 3) + (2 * 3)$

$(1 - 2) * 3 = (1 * 3) - (2 * 3)$

– Das Distributivgesetz in der Mengenlehre:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Regeln für das Rechnen mit Mengen

– **De Morgansche Regel**

…müsste eigentlich Ockhamsche Regel heißen, da sie bereits William von Ockham („Ockhams Rasiermesser“ / „Occam's razor“) bekannt war

„Von mehreren möglichen Erklärungen für ein und denselben Sachverhalt ist die einfachste Theorie allen anderen vorzuziehen.“

– Die De Morgansche Regel lautet:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

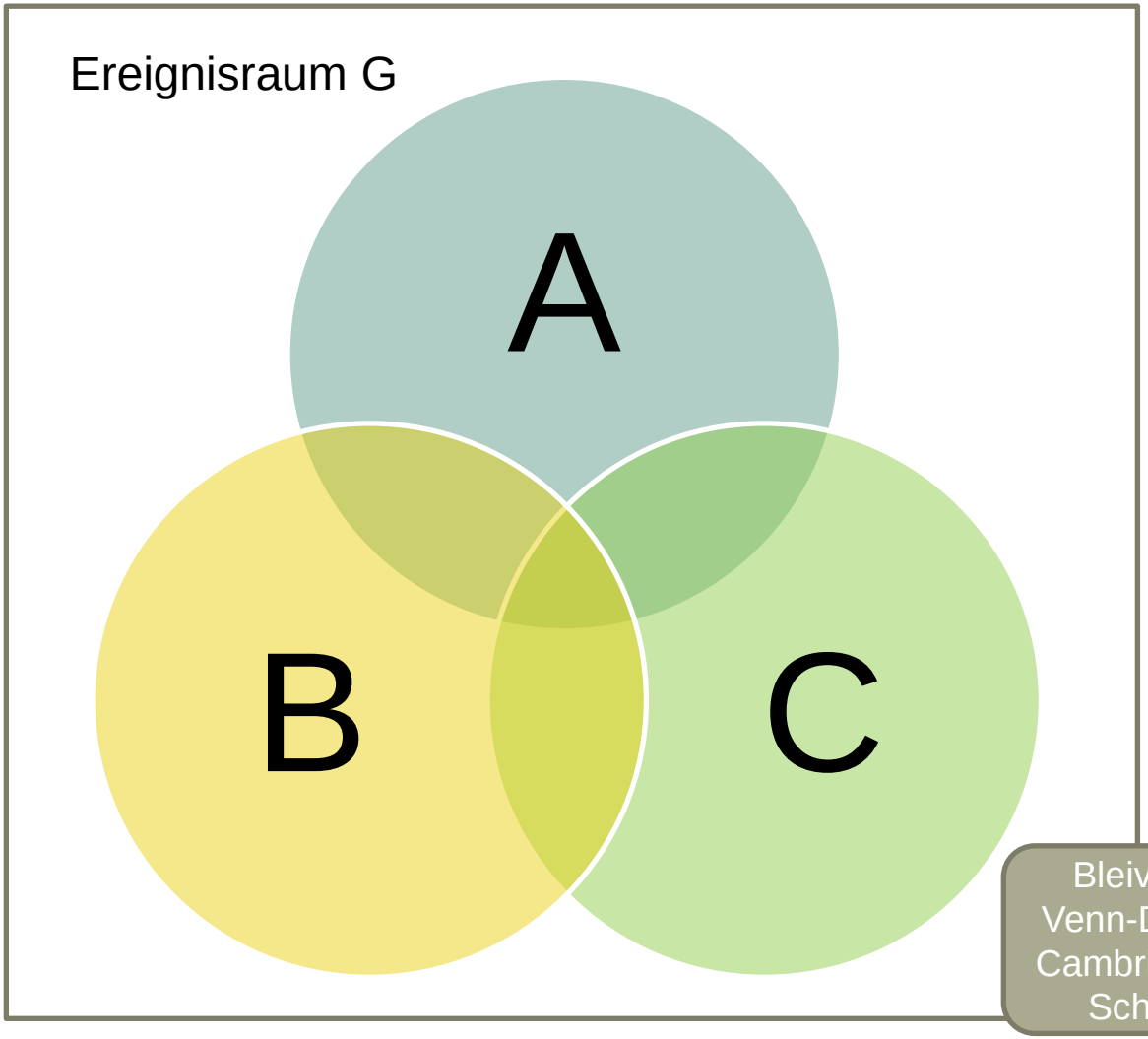
Augustus de Morgan (1806 – 1871)
(Quelle: WikiMedia; Lizenz: gemeinfrei)

William von Ockham (1288 – 1347)
(Quelle: WikiMedia; Lizenz: gemeinfrei)

Übung: Logische Operatoren und Mengen

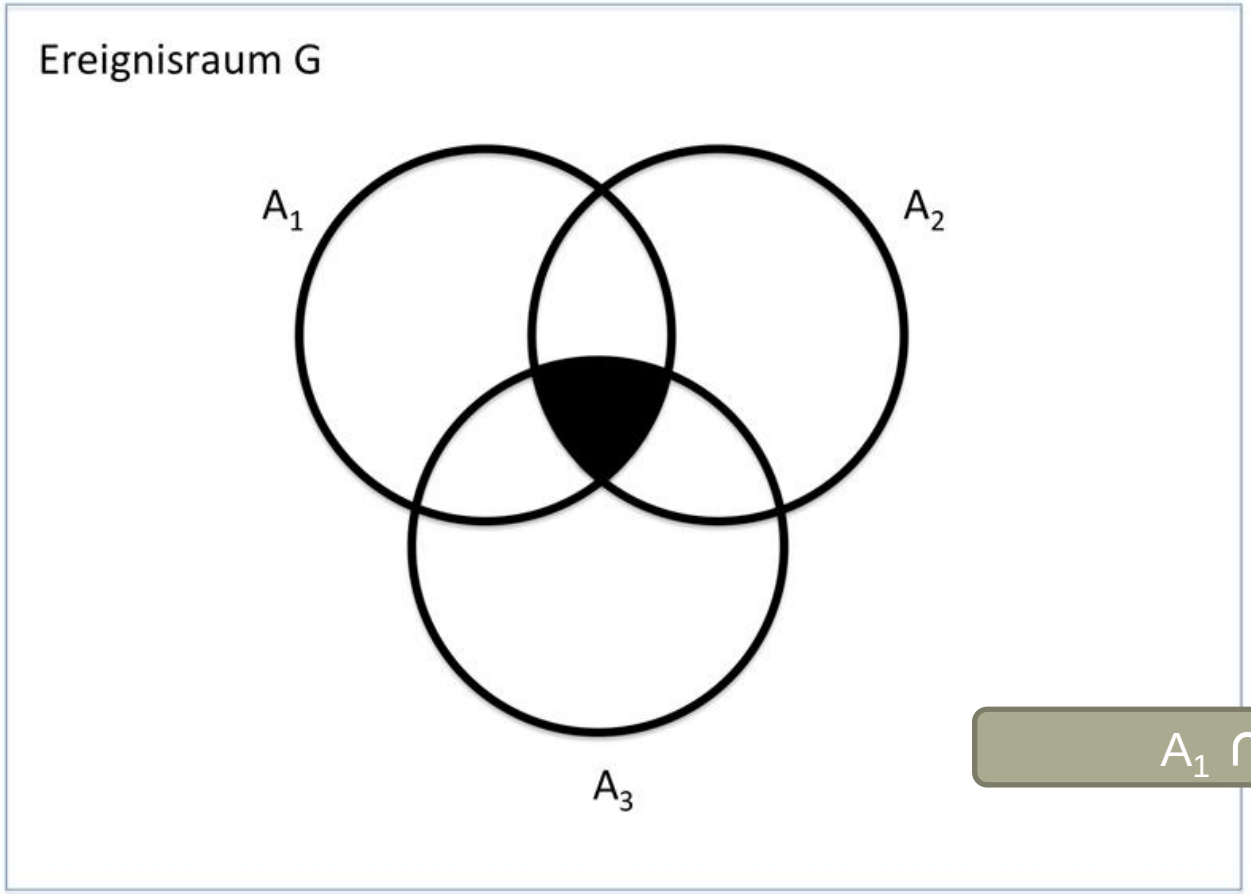
- Die Menge Ω = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10] verfügt über drei Teilmengen
  - Menge der geraden Zahlen A = [2; 4; 6; 8; 10]
  - Menge der ungeraden Zahlen B = [1; 3; 5; 7; 9;]
  - Menge der zweistelligen Zahlen C = [10]
- Die nachfolgenden Beispiele verdeutlichen die Anwendung der Operatoren
  - $A \cap B = B \cap A = \emptyset$
  - $B \cap C = C \cap B = \emptyset$
  - $A \cap C = C \cap A = [10]$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \emptyset$
  - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = \emptyset$
  - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [10]$
  - $A \cup B = B \cup A = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10]$
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10]$

Mengenvisualisierung mit Venn-Diagrammen



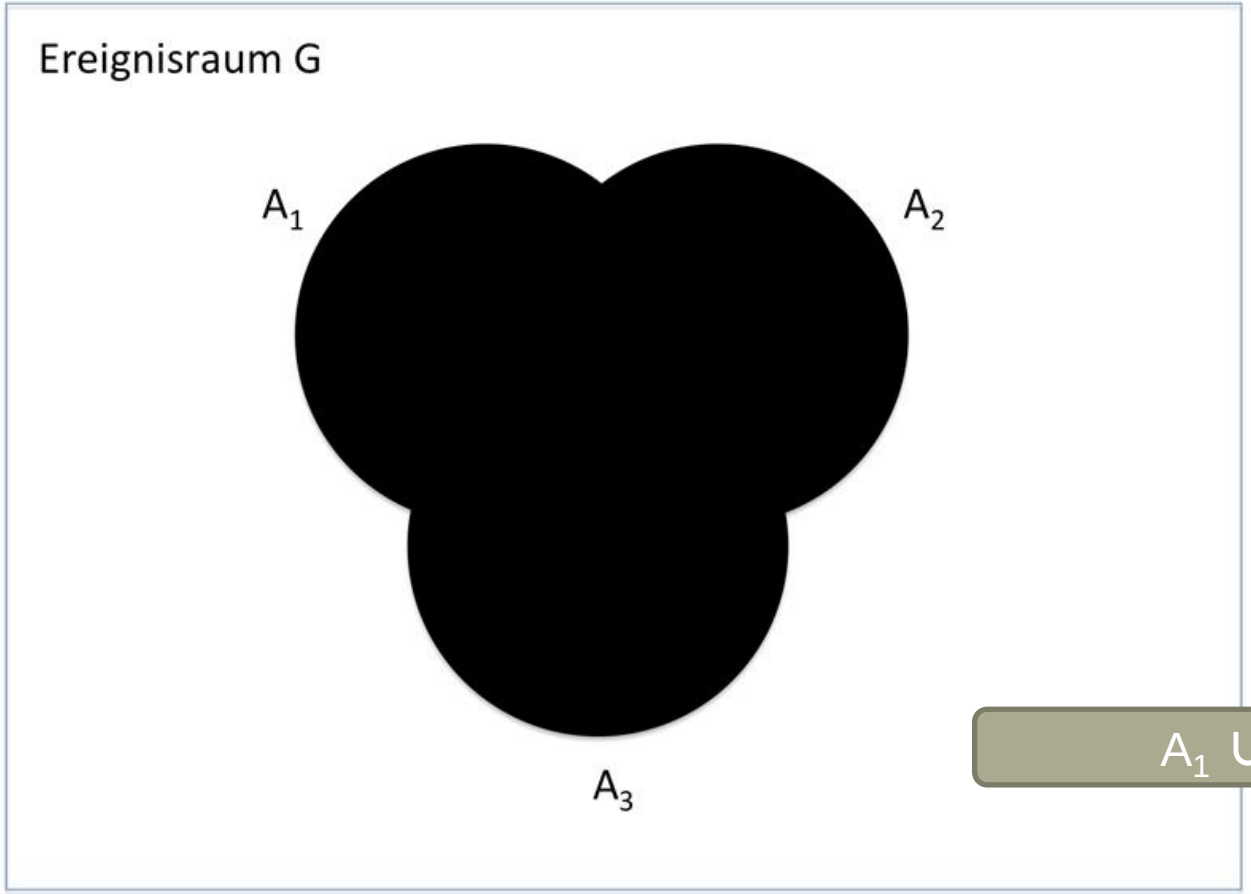
Bleiverglastes Fenster mit einem Venn-Diagramm in Venns Studienort Cambridge (Quelle: WikiMedia; User: Schutz; Lizenz: CC BY-SA 2.5)

Beispiel: Konstruktion von Venn-Diagrammen



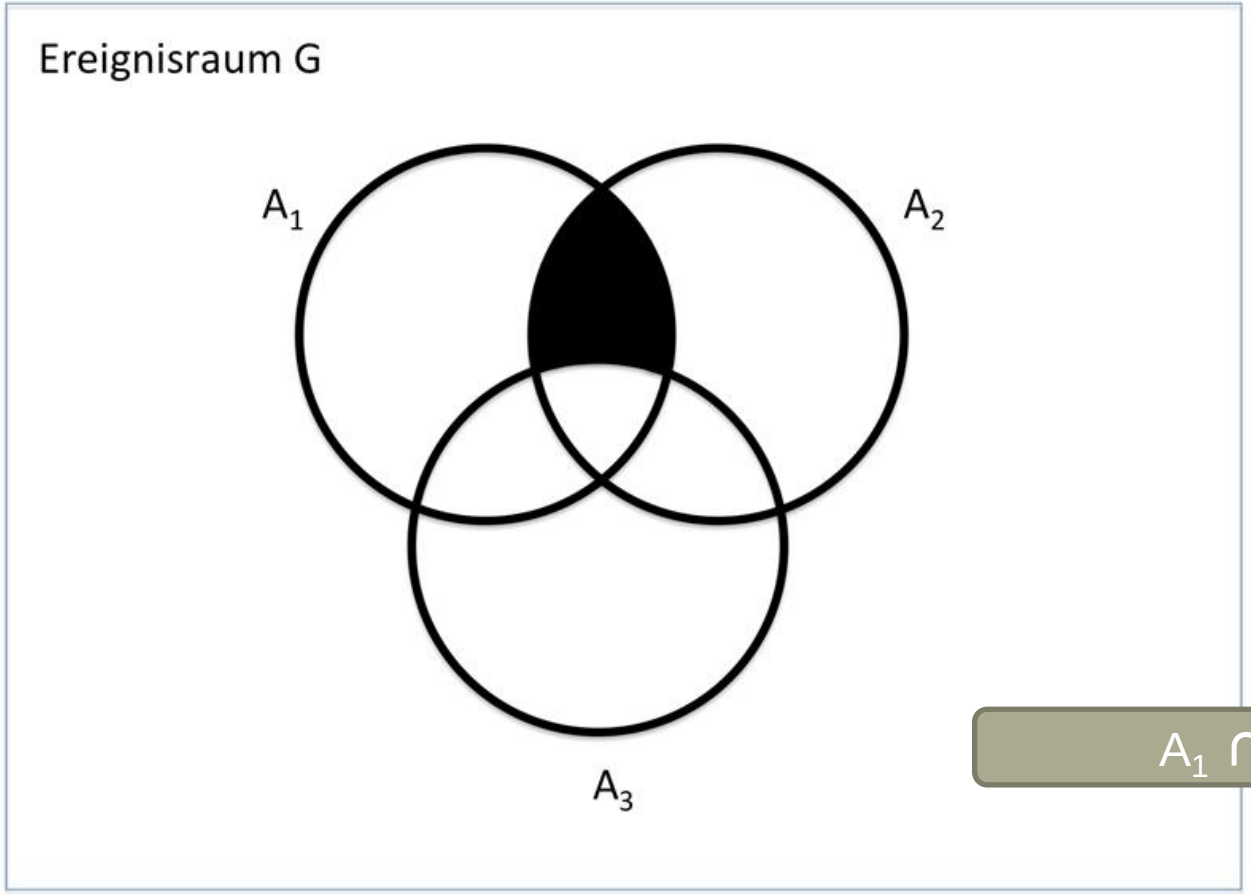
$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Beispiel: Konstruktion von Venn-Diagrammen



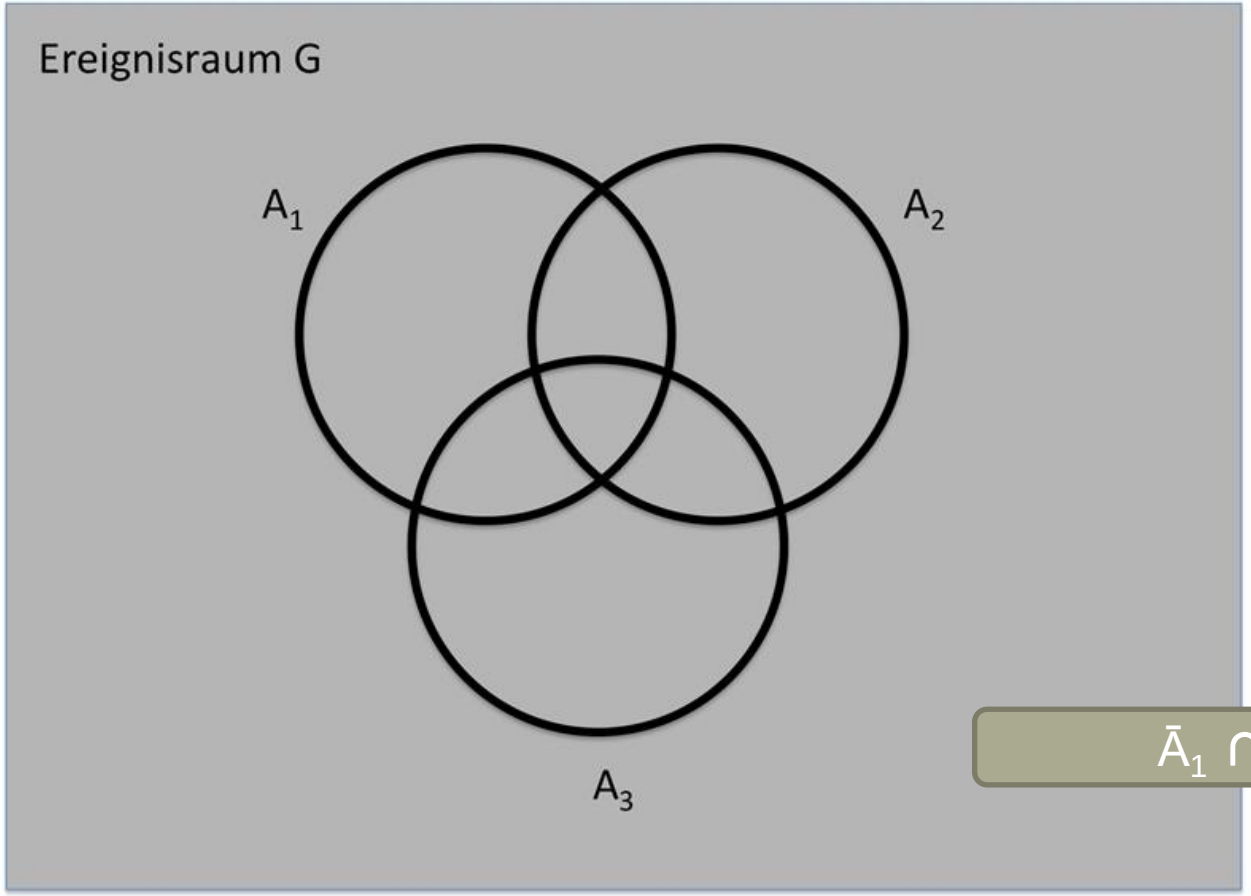
$A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Beispiel: Konstruktion von Venn-Diagrammen



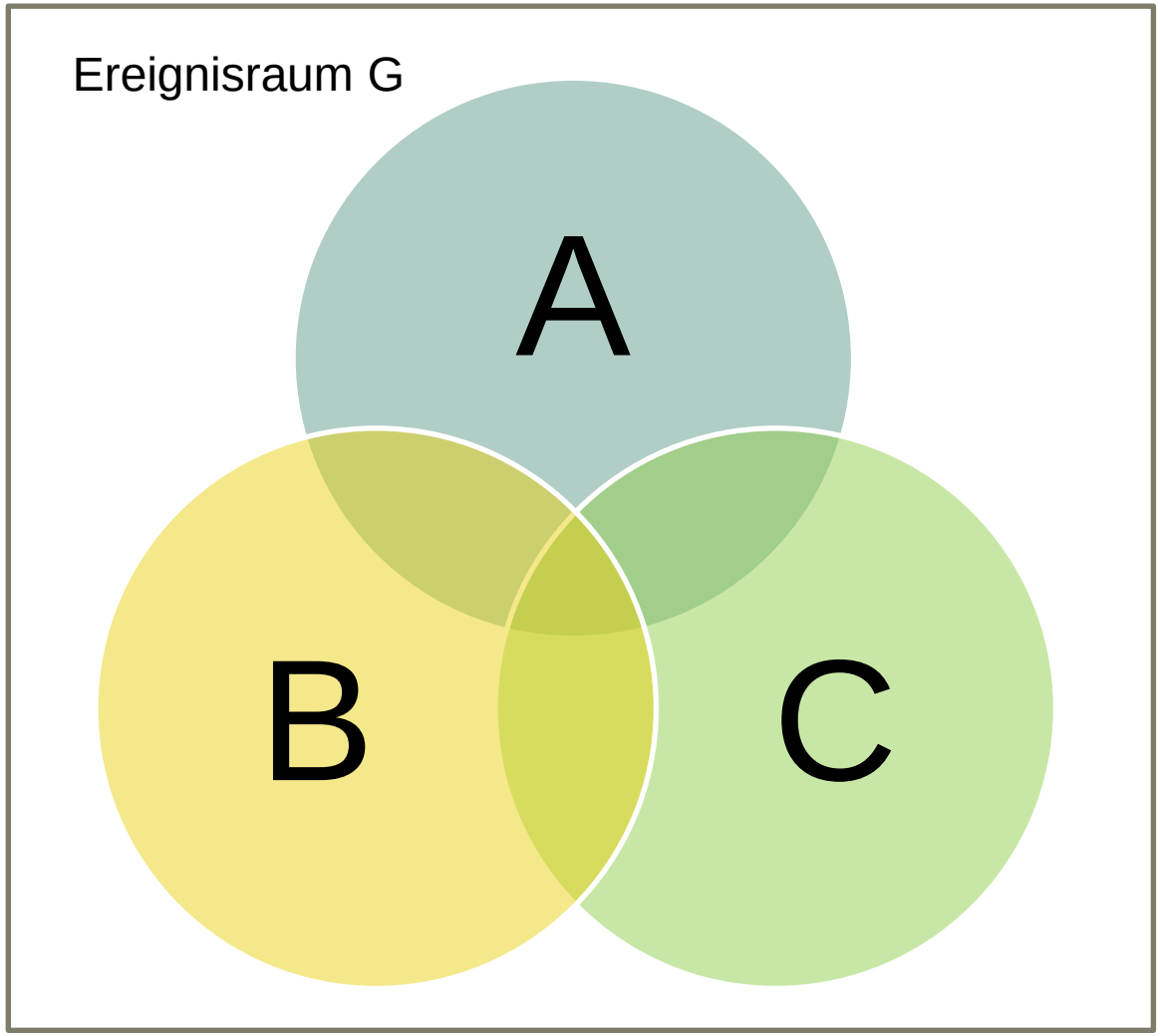
$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$

Beispiel: Konstruktion von Venn-Diagrammen



$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$

Mengenvisualisierung mit Venn-Diagrammen



Welche Fläche entspricht…?

$A \cap B$

$A \cap C$

$A \cup B$

$A \cup B \cup C$

$A \cap B \cap C$

$\bar{A}$

$\bar{A} \cap B$

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

– Besitzt ein Zufallsvorgang A endlich viele Elementarereignisse und verfügt jedes dieser Ereignisse über die gleiche Eintrittschance, berechnet man die **Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses P(A)** (das aus mehreren Elementarereignissen bestehen kann) nach Laplace wie folgt:

  P (A) = Σ für A günstiger Elementarereignisse / Σ möglicher Elementarereignisse

– Die Wahrscheinlichkeit auf eine 3 beim einmaligen Würfeln liegt daher bei:

  P(3) = [3] / [1; 2; 3; 4; 5; 6] = 1 / 6 = 0,167 = 16,7%

– Die Wahrscheinlichkeit auf eine gerade Zahl beim Würfen liegt dagegen bei:

  P (gerade Zahl) = [2; 4; 6] / [1; 2; 3; 4; 5; 6] = 3 / 6 = 0,5 = 50%

Einige Laplace-Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ beim Münzwurf: $$\frac{[K]}{[Z,K]} = \frac{1}{2}$$
- Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Zahl beim Würfeln: $$\frac{[1,3,5]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl beim Würfeln: $$\frac{[2,4,6]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
- Wahrscheinlichkeit für eine Summe > 4 beim Würfeln: $$\frac{[5,6]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
- Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige in der Lotterie: $$\frac{1}{?}$$

Woher nehmen wir den Nenner?

Einige Ereignisse und Gegenereignisse

- Wahrscheinlichkeit für eine 3 beim Würfelwurf: $\frac{[3]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{1}{6}$
- Gegenereignis zu einer 3 beim Würfelwurf: $\frac{[1,2,4,5,6]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{5}{6}$
- Wahrscheinlichkeit für mindestens eine 3 beim Würfelwurf: $\frac{[3,4,5,6]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- Gegenereignis zu mindestens einer 3 beim Würfelwurf: $\frac{[1,2]}{[1,2,3,4,5,6]} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Warum ist das Gegenereignis zu „mindestens 3“ nicht „höchstens 3“, sondern „höchstens 2“?

Weitere Wahrscheinlichkeitsbegriffe

- **Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff:** Ableitung von a priori nicht bekannten Wahrscheinlichkeiten aus vergangenen Erfahrungen

  - Beispiel: Wenn 8 der letzten 10 neu auf den Markt gebrachten Digitalkameras einen Produktlebenszyklus von unter 6 Monaten hatten, kann mit 80% Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass sich dies bei einem neuen Modell ebenso verhält

    (nur möglich, wenn sich die Vorgänge nicht gegenseitig beeinflussen)

- **Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff:** Subjektiv durch Personen (auf Basis von (Teil-) Daten oder „Bauchgefühl“) vorgenommene Wahrscheinlichkeitsschätzungen

- **Im Rahmen dieser Vorlesung wird nachfolgend nur noch der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Pierre de Laplace von Bedeutung sein**

Die drei Axiome von Kolmogorov

– **Axiom 1: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A eines Zufallsvorgangs ist eine nichtnegative reelle Zahl**

$$P(A) \geq 0$$

(Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses darf nicht < 0 sein)

– **Axiom 2: Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Elementarereignisse eines Zufallsvorgangs ergeben zusammen den Wert 1**

$$P(\Omega) = 1$$

(Die Wahrscheinlichkeit aller Ereignisse darf nicht > 1 sein)

– **Axiom 3: Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge zweier oder mehrerer Ereignisse eines Zufallsvorgangs berechnet sich aus der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse, wenn diese paarweise disjunkt sind**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

falls

$$P(A \cap B) = \varnothing$$

Was verraten uns die drei Axiome?

– **Axiom 1: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A eines Zufallsvorgangs ist eine nichtnegative reelle Zahl**

$$P(A) \geq 0$$

„Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, liegt bei -16,7 %“

„Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, liegt bei 16,7%“

– **Axiom 2: Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Elementarereignisse eines Zufallsvorgangs ergeben zusammen den Wert 1**

$$P(\Omega) = 1$$

„Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln, liegt bei 120%“

„Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln, liegt bei 50%“

„Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zwischen 1 und 6 zu würfeln, liegt bei 100%“

Was verraten uns die drei Axiome?

– **Axiom 3: Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge zweier oder mehrerer Ereignisse eines Zufallsvorgangs berechnet sich aus der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten der Ereignisse, wenn diese paarweise disjunkt sind**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

falls

$$P(A \cap B) = \emptyset$$

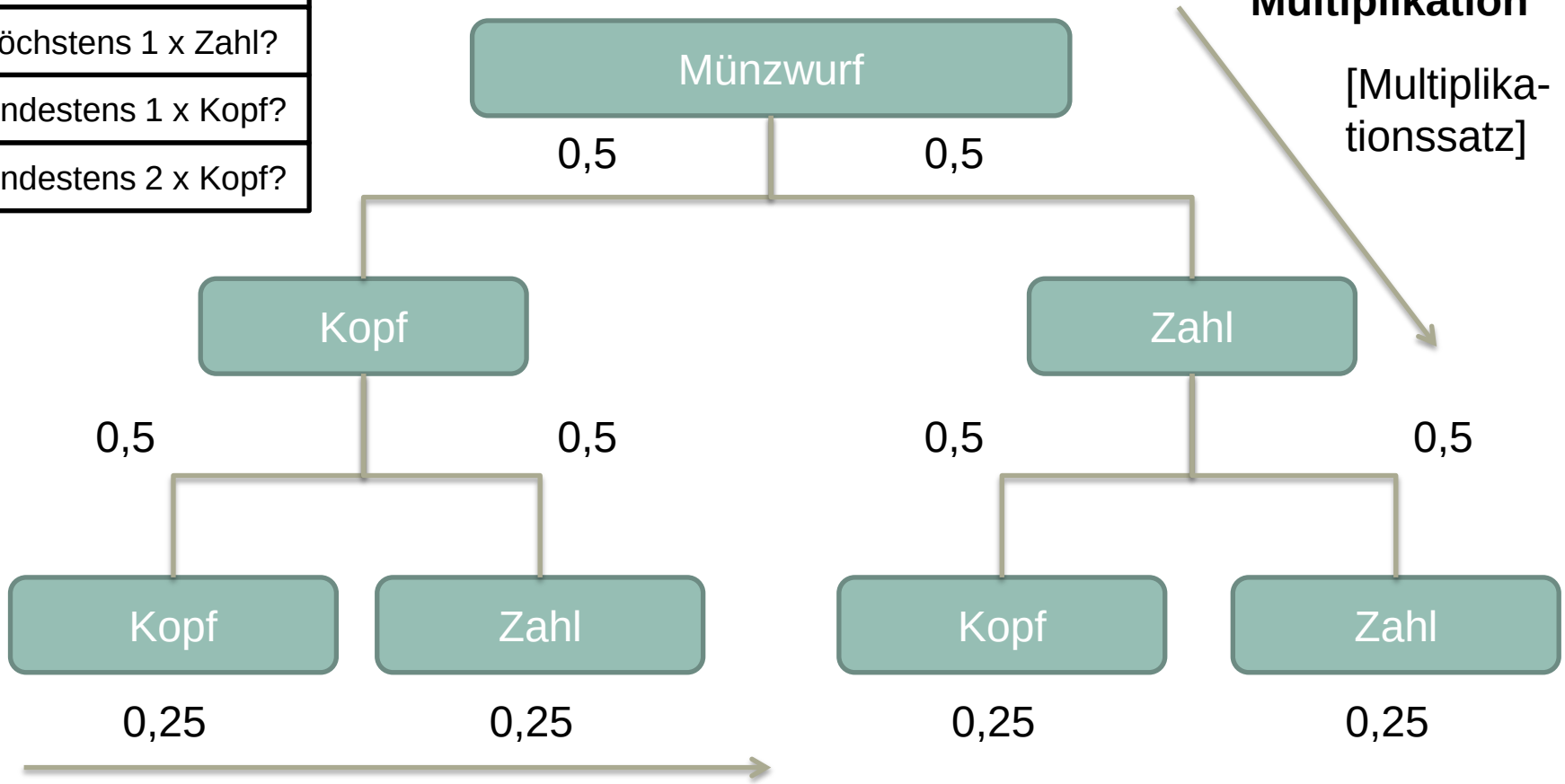
(auch bekannt als: Additivität bei disjunkten Ereignissen)

„Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl kleiner 3 oder eine Zahl kleiner 2 zu würfeln, liegt bei [P(2) + P(1)] + [P(1)] = [1/6 + 1/6] + [1/6] = 3/6 = 1/2 = 50%“

„Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu Würfeln, liegt bei P(2) + P(4) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2 = 50%“

Pfaddiagramme von Zufallsexperimenten

Genau 1 x Zahl?
Höchstens 1 x Zahl?
Mindestens 1 x Kopf?
Mindestens 2 x Kopf?



Addition [Additionssatz]

Auch im Pfaddiagramm findet sich Laplace

– Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Laplace:

$$P(A) = \frac{\sum \textit{für A günstiger Elementarereignisse}}{\sum \textit{möglicher Elementarereignisse}}$$

– Wahrscheinlichkeit für mindestens 1 x Zahl beim zweifachen Münzwurf:

$$P(A) = \frac{(Z;K);(K;Z);(Z;Z)}{(Z;K);(K;Z);(Z;Z);(K;K)} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

Absturz der Challenger am 28.01.1986
(Quelle: WikiMedia; Lizenz: gemeinfrei)

„The Challenger Disaster“ (BBC, 2013)
über die Arbeit der Rogers-Kommission

„Die Chance auf ein Versagen liegt bei nur 1%“

1. Shuttle-Start

Problem: 0,01

Kein Problem: 0,99

…

2. Shuttle-Start

Problem: 0,01

Kein Problem: 0,99

…

…

100. Shuttle-Start

Wie sicher sind „sichere“ Systeme auf lange Zeit?

Wahrscheinlichkeit völliger Unfallfreiheit bei 100 Starts: $0{,}99^{100} = 0{,}3660 = 36{,}6\%$

Additions- und Multiplikationssätze

- Sind zwei Ereignisse A und B miteinander unvereinbar (disjunkt, d.h. ohne eine Schnittmenge), so gilt für sie der **Additionssatz für unvereinbare Ereignisse**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Können zwei Ereignisse A und B auch über eine Schnittmenge verfügen (nicht disjunkt), so gilt für sie der **Additionssatz für beliebige Ereignisse**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Warum der Abzug?

- Sind zwei Ereignisse stochastisch unabhängig, d.h. beeinflusst das Eintreten eines Ereignisses nicht die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des anderen Ereignisses, so gilt für sie der **Multiplikationssatz bei stochastischer Unabhängigkeit**:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

- Liegt keine stochastische Unabhängigkeit vor, spricht man von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit** (z.B. der Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass zuvor A eintritt) – den Umgang damit lernen wir im Kurs noch kennen

Übung: Rechnen mit den A- und M-Sätzen

- Zwei Sachbearbeiter suchen unabhängig voneinander nach Belegen für eine (unstrittige) Steuerhinterziehung in den gleichen Unterlagen, wobei jeder von ihnen mit einer Trefferquote von 0,4 arbeitet. Wie groß ist die Chance dafür, dass mindestens einer der beiden den erforderlichen Beweis findet?

- Zur Lösung dieser Aufgabe werden der **Additionssatz für beliebige Ereignisse** (es kann ja der Fall eintreten, dass beide Sachbearbeiter fündig werden) und der **Multiplikationssatz bei stochastischer Unabhängigkeit** (die Sachbearbeiter beeinflussen sich bei ihrer Suche nicht gegenseitig) benötigt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Additionssatz

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Multiplikationssatz

(alternativ ist die Lösung natürlich auch über ein Pfaddiagramm möglich)

Übung: Rechnen mit den A- und M-Sätzen

- Zwei Sachbearbeiter suchen unabhängig voneinander nach Belegen für eine (unstrittige) Steuerhinterziehung in den gleichen Unterlagen, wobei jeder von ihnen mit einer Trefferquote von 0,4 arbeitet. Wie groß ist die Chance dafür, dass mindestens einer der beiden den erforderlichen Beweis findet?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}4 - P(A \cap B)$$

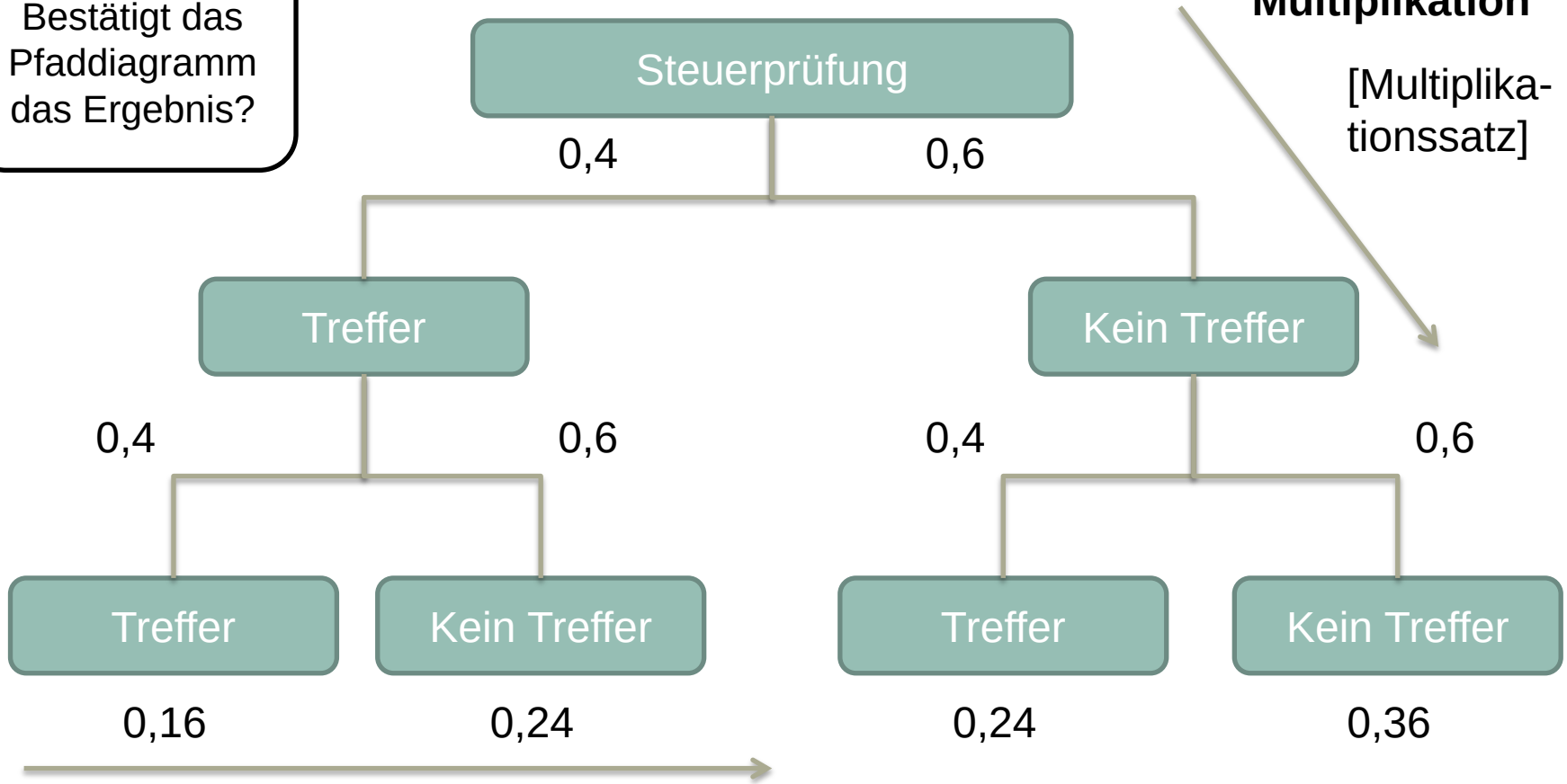
$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}4 * 0{,}4 = 0{,}16$$

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}4 - 0{,}16 = 0{,}64$$

Übung: Rechnen mit den A- und M-Sätzen

Bestätigt das Pfaddiagramm das Ergebnis?



Multiplikation

[Multiplika-tionssatz]

Addition [Additionssatz]

0,16+0,24+0,24=0,64 -> passt!

Kombinatorik: Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Kernproblem: Um mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit rechnen zu können, muss die Anzahl der günstigen sowie die Anzahl der möglichen Ereignisse bekannt sein – wie berechnen sich diese unter verschiedenen Rahmenbedingungen?

(Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, um einen Lotto-Schein auszufüllen?)

- Spielt die Reihenfolge der Ereignisse eine Rolle?
  - JA: Variation
    - Modell ohne Zurücklegen: $\frac{n!}{(n-k)!}$
    - Modell mit Zurücklegen: n^k
  - NEIN: Kombination
    - Modell ohne Zurücklegen: $\frac{n!}{k!*(n-k)!}$
    - Modell mit Zurücklegen: $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!}$

Variation – Modell ohne Zurücklegen

- Wann spricht man von einer **Variation – Modell ohne Zurücklegen**?
  - Auswahl von Objekten (Ereignissen) in einer bestimmten **Reihenfolge**
  - Jedes Objekt (Ereignis) kann dabei **nur ein Mal auftreten** (eintreten)
- Beispiel: Berechnung der Anzahl möglicher 4-stelliger PIN-Kombinationen (k) aus 10 Ziffern (n), wenn jede Ziffer pro PIN maximal ein Mal auftreten kann

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{3628800}{720} = 5040$$

Wie viele Reihenfolgen gibt es, in denen k aus n Elementen angeordnet werden können, wenn jedes Element nur ein Mal gezogen werden kann?

Kurze Wiederholung: 6!
(gesprochen „6 Fakultät“)
= 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720

10*9*8*7
= 5040
Warum?

Variation – Modell ohne Zurücklegen

– Einen Sonderfall stellt die **Permutation** bei Auswahl aller Objekte (n = k) dar:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Wie viele Reihenfolgen gibt es, in denen n Elemente angeordnet werden können?

– Rechenlogik im Sonderfall (PIN mit 10 aus 10 Ziffern ohne Zurücklegen)

  – Für die erste Stelle der PIN kommen insgesamt 10 Ziffern in Frage
  – Für die zweite Stelle der PIN kommen nun noch 9 Ziffern in Frage
  – Für die dritte Stelle der PIN kommen nun noch 8 Ziffern in Frage
  – Für die vierte Stelle der PIN kommen nun noch 7 Ziffern in Frage
  – Für die fünfte Stelle der PIN kommen nun noch 6 Ziffern in Frage…

  – 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 10! = 3.628.800

Variation – Modell ohne Zurücklegen

– Aus einer Urne mit 3 Kugeln (A, B, C) werden 2 Kugeln gezogen

Nummer	Anordnung	Wird die Anordnung gezählt?
1	A, B	JA
2	A, C	JA
3	B, A	JA
4	B, C	JA
5	C, A	JA
6	C, B	JA

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Variation – Modell mit Zurücklegen

- Wann spricht man von einer **Variation – Modell mit Zurücklegen**?
  - Auswahl von Objekten (Ereignissen) in einer bestimmten **Reihenfolge**
  - Jedes Objekt (Ereignis) kann dabei **mehrere Male auftreten** (eintreten)
- Beispiel: Berechnung der Anzahl möglicher 4-stelliger PIN-Kombinationen (k) aus 10 Ziffern (n), wenn jede Ziffer pro PIN beliebig häufig auftreten kann

$$n^k = 10^4 = 10000$$

Wie viele Reihenfolgen gibt es, in denen k aus n Elementen angeordnet werden können, wenn jedes Element beliebig oft (bzw. maximal k-mal) gezogen werden kann?

  - Für die erste Stelle der PIN kommen insgesamt 10 Ziffern in Frage
  - Für alle weiteren Stellen kommen ebenfalls noch 10 Ziffern in Frage
  - $10 * 10 * 10 * 10 = 10^4$

Variation – Modell mit Zurücklegen

– Aus einer Urne mit 3 Kugeln (A, B, C) werden 2 Kugeln gezogen

Nummer	Anordnung	Wird die Anordnung gezählt?
1	A, B	JA
2	A, C	JA
3	B, A	JA
4	B, C	JA
5	C, A	JA
6	C, B	JA
7	A, A	JA
8	B, B	JA
9	C, C	JA

$$n^k = 3^2 = 9$$

Kombination – Modell ohne Zurücklegen

- Wann spricht man von einer **Kombination – Modell ohne Zurücklegen**?
  - Auswahl von Objekten (Ereignissen) ohne Beachtung der **Reihenfolge**
  - Jedes Objekt (Ereignis) kann dabei **nur ein Mal auftreten** (eintreten)
- Beispiel: Berechnung der möglichen Kombinationen beim Lotto (6 aus 49, Ziehen ohne Zurücklegen, die Reihenfolge spielt beim Gewinn keine Rolle)

$$\frac{n!}{k!*(n-k)!} = \frac{49!}{6!*(49-6)!} = 13983816$$

Dieser Term wird auch als Bionomialkoeffizient bezeichnet (nCr-Taste auf vielen Taschenrechnern)

- Die Wahrscheinlichkeit auf einen Hauptgewinn in der Lotterie liegt nach der klassischen Definition von Laplace also bei 1 / 13.983.816 = 0,000000715%

Kombination – Modell ohne Zurücklegen

– Aus einer Urne mit 3 Kugeln (A, B, C) werden 2 Kugeln gezogen

Nummer	Anordnung	Wird die Anordnung gezählt?
1	A, B	JA
2	A, C	JA
3	B, A	NEIN (bereits in 1 gezählt)
4	B, C	JA
5	C, A	NEIN (bereits in 2 gezählt)
6	C, B	NEIN (bereits in 4 gezählt)

$$\frac{n!}{k!*(n-k)!} = \frac{3!}{2!*(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

Kombination – Modell mit Zurücklegen

- Wann spricht man von einer **Kombination – Modell mit Zurücklegen**?
  - Auswahl von Objekten (Ereignissen) ohne Beachtung der **Reihenfolge**
  - Jedes Objekt (Ereignis) kann dabei **mehrere Male auftreten** (eintreten)
- Beispiel: Aus einer Urne mit 10 nummerierten Kugeln wird 3 Mal eine Kugel gezogen, wobei die gezogene Kugel jedes Mal wieder zurückgelegt wird. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten für Kugeln ergeben sich?

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!} = \frac{(10+3-1)!}{(10-1)!*3!} = \frac{479001600}{362880*6} = \frac{479001600}{2177280} = 220$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k aus n Elementen zu kombinieren, wenn die Elemente immer wieder neu gezogen werden können?

Kombination – Modell mit Zurücklegen

– Aus einer Urne mit 3 Kugeln (A, B, C) werden 2 Kugeln gezogen

Nummer	Anordnung	Wird die Anordnung gezählt?
1	A, B	JA
2	A, C	JA
3	B, A	NEIN (bereits in 1 gezählt)
4	B, C	JA
5	C, A	NEIN (bereits in 2 gezählt)
6	C, B	NEIN (bereits in 4 gezählt)
7	A, A	JA
8	B, B	JA
9	C, C	JA

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!} = \frac{(3+2-1)!}{(3-1)!*2!} = \frac{24}{2*2} = \frac{24}{4} = 6$$

Kombinatorik: Wie viele Möglichkeiten gibt es?

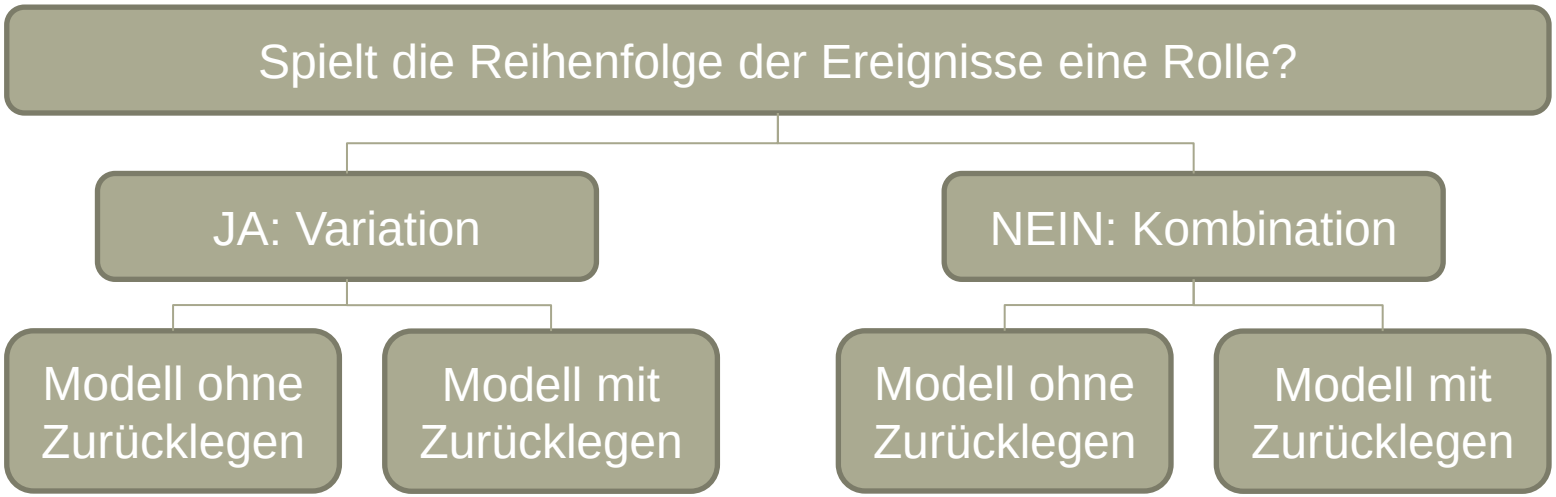
Kernproblem: Um mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit rechnen zu können, muss die Anzahl der günstigen sowie die Anzahl der möglichen Ereignisse bekannt sein – wie berechnen sich diese unter verschiedenen Rahmenbedingungen?

(Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, um einen Lotto-Schein auszufüllen?)

- Spielt die Reihenfolge der Ereignisse eine Rolle?
  - JA: Variation
    - Modell ohne Zurücklegen: $\frac{n!}{(n-k)!}$
    - Modell mit Zurücklegen: n^k
  - NEIN: Kombination
    - Modell ohne Zurücklegen: $\frac{n!}{k!*(n-k)!}$
    - Modell mit Zurücklegen: $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!}$

Übung: Wie viele Möglichkeiten gibt es?

- Wie viele Möglichkeiten für eine vierstellige PIN existieren, wenn...
  - ...keine der vier Ziffern bekannt ist?
  - ...bekannt ist, dass eine der vier Ziffern eine 6 ist?
  - ...bekannt ist, dass die Ziffer 6 an erster Stelle steht?



$$\frac{n!}{(n-k)!} \qquad n^k \qquad \frac{n!}{k!*(n-k)!} \qquad \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!}$$

Übung: Wie viele Möglichkeiten gibt es?

- Wie viele Möglichkeiten für eine vierstellige PIN existieren, wenn...
  - ...keine der vier Ziffern bekannt ist?
  - ...bekannt ist, dass eine der vier Ziffern eine 6 ist?
  - ...bekannt ist, dass die Ziffer 6 an erster Stelle steht?

Erste Annahme: Es müssten immer weniger Möglichkeiten werden...

- In diesem Fall liegt eine Variation (die Reihenfolge der Ziffern spielt bei Eingabe der PIN eine Rolle) mit Zurücklegen (alle Ziffern können mehrfach auftreten) vor
  - Wenn keine Ziffer bekannt ist: $n^k = 10^4 = 10000$
  - Wenn bekannt ist, dass die PIN eine 6 enthält: $4 * n^k = 4 * 10^3 = 4000$
  - Wenn bekannt ist, dass die 6 an erster Stelle steht: $n^k = 10^3 = 1000$

Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

- Bisherige Grundannahme: Ereignisse treten unabhängig voneinander ein – d.h. welche Zahl gewürfelt wurde, wirkt sich nicht auf den nächsten Würfelwurf aus

- Neue Grundannahme: Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A hängt von der Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines vorherigen Ereignisses B ab

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist definiert als

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ Was wiederum umgeformt werden kann zu

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) * P(B) \quad \text{für} \quad P(B) > 0$$

Sind A und B stochastisch unabhängig voneinander, so wird vereinfacht zu

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Übung: Würfeln mit zwei Würfeln

- Wie groß ist (nach Laplace) die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Würfeln mit zwei Würfeln eine Gesamtzahl größer als 8 zu erzielen?
  - Von 36 Kombinationen (6 * 6) erfüllen nur 10 diese Bedingung
  - Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei 10 / 36 = 0,278 = 27,8%
- Würfelt man nacheinander, kennt man das Ergebnis des ersten Wurfs bereits. Handelt es sich um eine 4, stellt sich die Frage, wie groß die Chance auf eine Augenzahl größer 8 nun unter dieser Bedingung ist
  - Dies wäre der Fall, wenn der zweite Würfel mindestens eine 5 zeigt

Woher kommen die 2/6?

$$P(S > 8 \mid W_1 = 4) \frac{P(S > 8 \cap W_1 = 4)}{P(W_1 = 4)} = \frac{\frac{2}{6} * \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

– Bilden die Ereignisse A_1, A_2, … A_k überschneidungsfrei (disjunkt) einen vollständigen Ereignisraum Ω, so gilt für ein Ereignis B ⊃ Ω der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i) * P(A_i)$$

– Anwendungsbeispiel: Drei Maschinen (A_1, A_2, A_3) stellen Bauteile mit einer Fehlerrate von A_1 = 0,02, A_2 = 0,04 und A_3 = 0,03 her. Aus Kapazitätsgründen werden mit A_1 50%, mit A_2 30% und mit A_3 20% der Bauteile produziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein fehlerhaftes Bauteil zu erhalten?

$$P(Fehler) = \sum_{i=1}^{3} P(Fehler \mid Maschine) * P(Maschine)$$

$$P(Fehler) = (0{,}02 * 0{,}5) + (0{,}04 * 0{,}3) + (0{,}03 * 0{,}2) = 0{,}028 = 2{,}8\%$$

Rechnen mit dem Satz von Bayes

- Das berühmte „Taxi-Problem“ wurde erstmalig von Arthur Engel formuliert

  - In einer Stadt existieren zwei Taxi-Firmen: Green Cab und Blue Cab
  - Der Marktanteil von Green Cab (mit grünen Fahrzeugen) liegt bei 85%
  - Der Marktanteil von Blue Cab (mit blauen Fahrzeugen) liegt bei 15%

  - Es kommt zu einem Unfall mit Fahrerflucht und einem einzigen Zeugen
  - Der Zeuge hat (unstrittig) ein Taxi gesehen und glaubt (strittig), dass es ein blaues Taxi war – **aber wie hoch ist die Zuverlässigkeit dieser Aussage?**

  - Das Gericht ordnet einen Sehtest an, bei dem sich herausstellt, dass der Zeuge die Farbe von Fahrzeugen bei Nacht mit 80%iger Wahrscheinlichkeit korrekt erkennt – **war der Unfallwagen also mit 80%iger Sicherheit blau?**

Rechnen mit dem Satz von Bayes

- Viele Probanden antworten so – aber warum ist diese Annahme falsch?
  - Es bleibt unberücksichtigt, dass die meisten Taxen grün und nicht blau sind
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge ein blaues Taxi gesehen hat, ist also nicht besonders groß – die Farbwahrnehmung ist dann erst der zweite Schritt
- In diesem Fall muss mit dem **Satz von Bayes** gerechnet werden

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) * P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i) * P(A_j)}{\sum_{j=1}^{k} P(B \mid A_i) * P(A_j)}$$

(Die Formel sehen wir uns nach einigen Vorüberlegungen gleich noch genauer an)

Rechnen mit dem Satz von Bayes

- Bevor wir uns der Formel zuwenden also noch ein paar Vorüberlegungen...

- Wären insgesamt nur 100 Taxen in der Stadt unterwegs…

  - …wären von diesen 85 grün (85% Marktanteil)
  - ...wären von diesen 15 blau (15% Marktanteil)

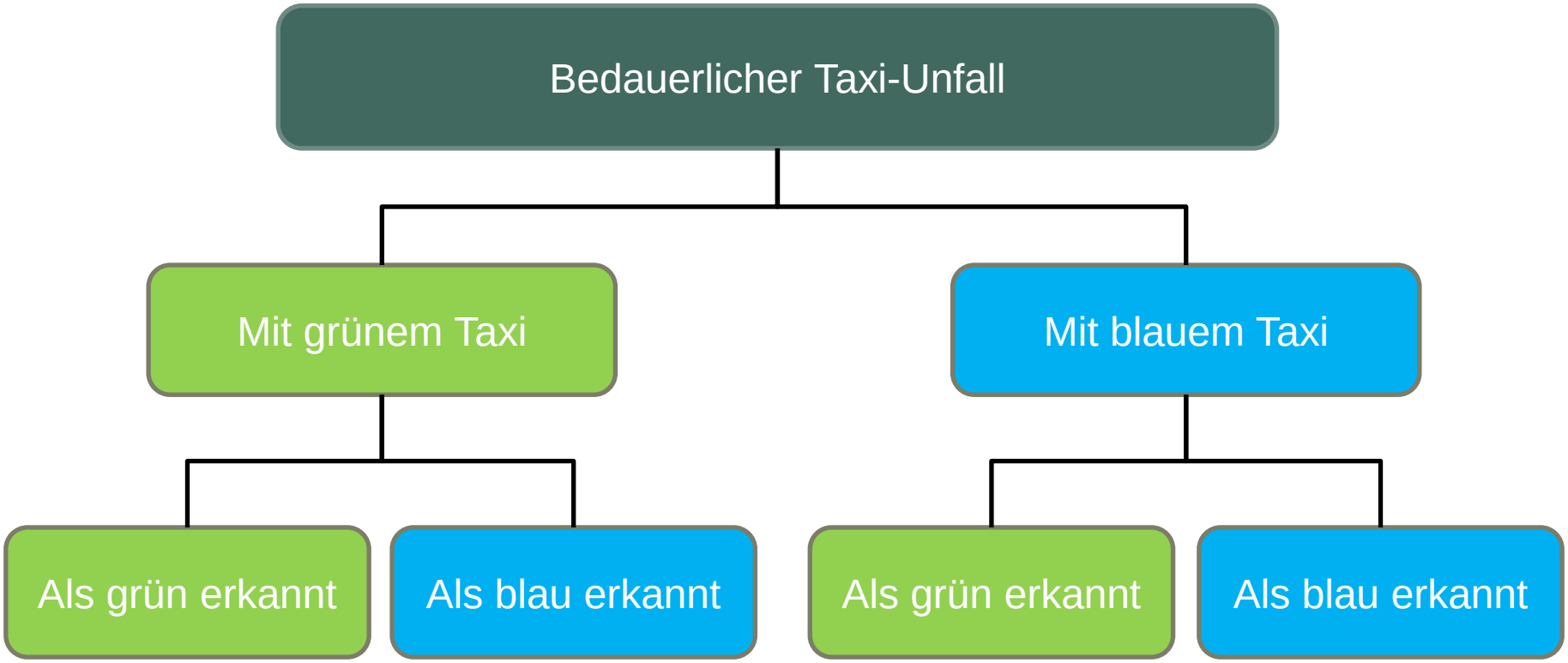
- Da der Zeuge Farben mit 80%iger Sicherheit korrekt erkennt…

  - …würde er 68 grüne Taxen als grün erkennen – und 17 als blau
  - …würde er 12 blaue Taxen als blau erkennen – und 3 als grün

- Diese Rahmenbedingungen müssen beachtet werden, will man wissen, wie groß die Chance für eine korrekte Aussage des Zeugen wirklich ist

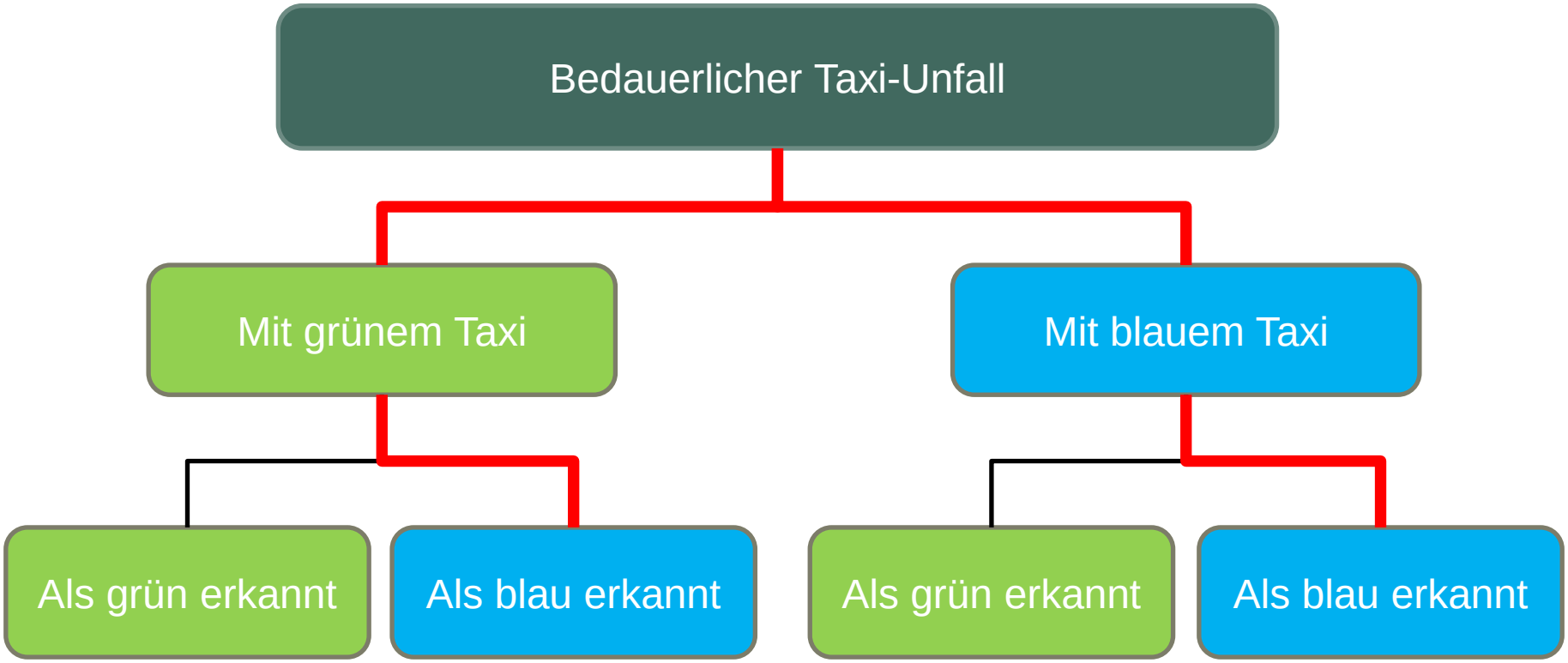
Rechnen mit dem Satz von Bayes

Welche Möglichkeiten gibt es insgesamt?



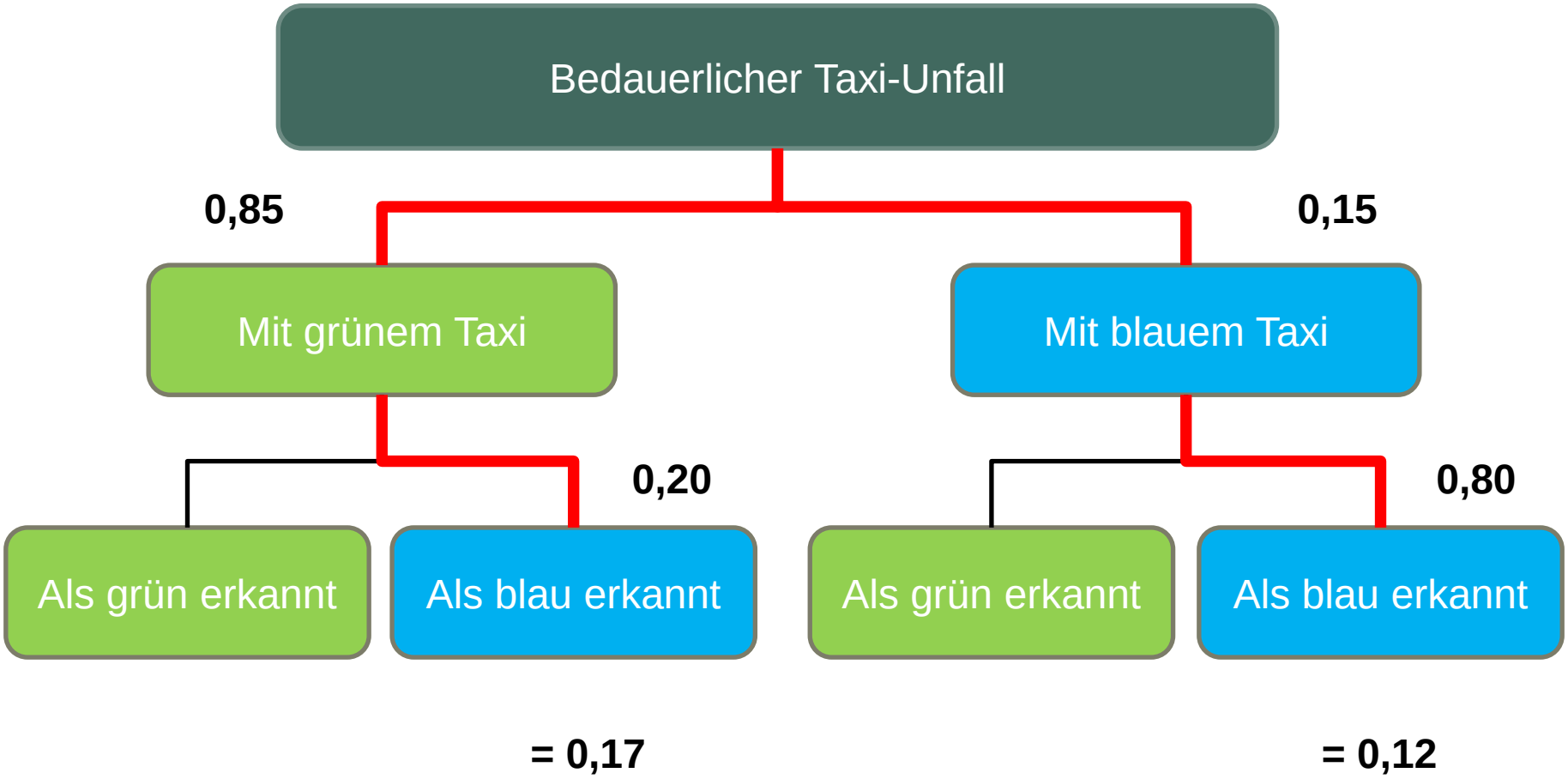
Rechnen mit dem Satz von Bayes

Welche Möglichkeiten sind von Bedeutung?



Rechnen mit dem Satz von Bayes

Welche Möglichkeiten sind von Bedeutung?



Rechnen mit dem Satz von Bayes

- Da der Zeuge das Taxi als blau identifiziert, sind zwei Pfade von Bedeutung
  - Das Unfalltaxi war grün (85%) und wird als blau erkannt (20%) -> 0,17
  - Das Unfalltaxi war blau (15%) und wird als blau erkannt (80%) -> 0,12
- Unter Berücksichtigung des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs nach Laplace würde man an der Stelle intuitiv – hoffentlich – wie folgt vorgehen:
  - P (A) = Σ günstiger Elementarereignisse / Σ möglicher Elementarereignisse
  - P (das Unfalltaxi war blau) = 0,12 / (0,17 + 0,12) = 0,12 / 0,29 = 0,41 = 41%
- Auch wenn diese Vorgehensweise eher intuitiv als formelgeleitet ist, führt sie letztlich zum korrekten Ergebnis – die Vorgehensweise unter Berücksichtigung des Satz von Bayes bzw. des Bayes-Theorem findet sich auf der nächsten Folie

Rechnen mit dem Satz von Bayes

Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung, dass A_i eingetreten ist (Zeuge hält ein blaues Taxi für blau)

Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Ereignisses A_i (Taxi war blau)

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) * P(A_i)}{P(B)}$$

Wahrscheinlichkeit für A_i unter der Bedingung, dass B eingetreten ist

(Taxi war wirklich blau (A_i) wenn der Zeuge es für blau hält (B))

Wahrscheinlichkeit dafür, dass B eintritt (die Summe aller Pfade, bei denen der Zeuge das Taxi am Ende für blau hält)

Rechnen mit dem Satz von Bayes

– Welche Größen sind für die formelgestützte Berechnung erforderlich?

TG = Taxi ist grün TB = Taxi ist blau

ZG = Zeuge hält das Taxi für grün ZB = Zeuge hält das Taxi für blau

Die Basisrate für TG liegt bei 0,85, die Basisrate für TB liegt bei 0,15

Als bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Zeugenaussagen ergeben sich

P(ZG|TG) = 0,8 P(ZG|TB) = 0,2 P(ZB|TG) = 0,2 P(ZB|TB) = 0,8

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) * P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(ZB \mid TB) * P(TB)}{P(ZB \mid TB) * P(TB) + P(ZB \mid TG) * P(TG)}$$

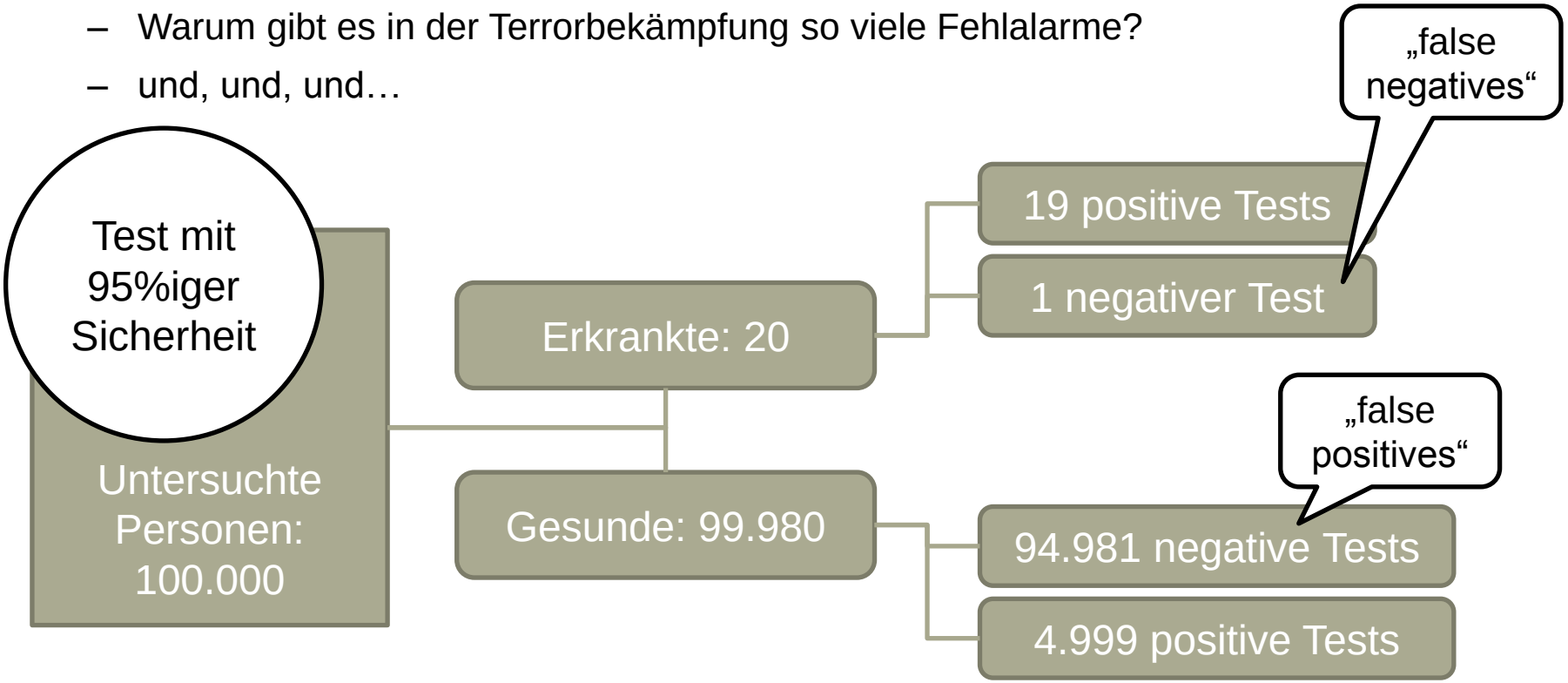
$$= \frac{0{,}80 * 0{,}15}{(0{,}80 * 0{,}15) + (0{,}20 * 0{,}85)} = 0{,}41$$

Deutlich geringer als 0,8…

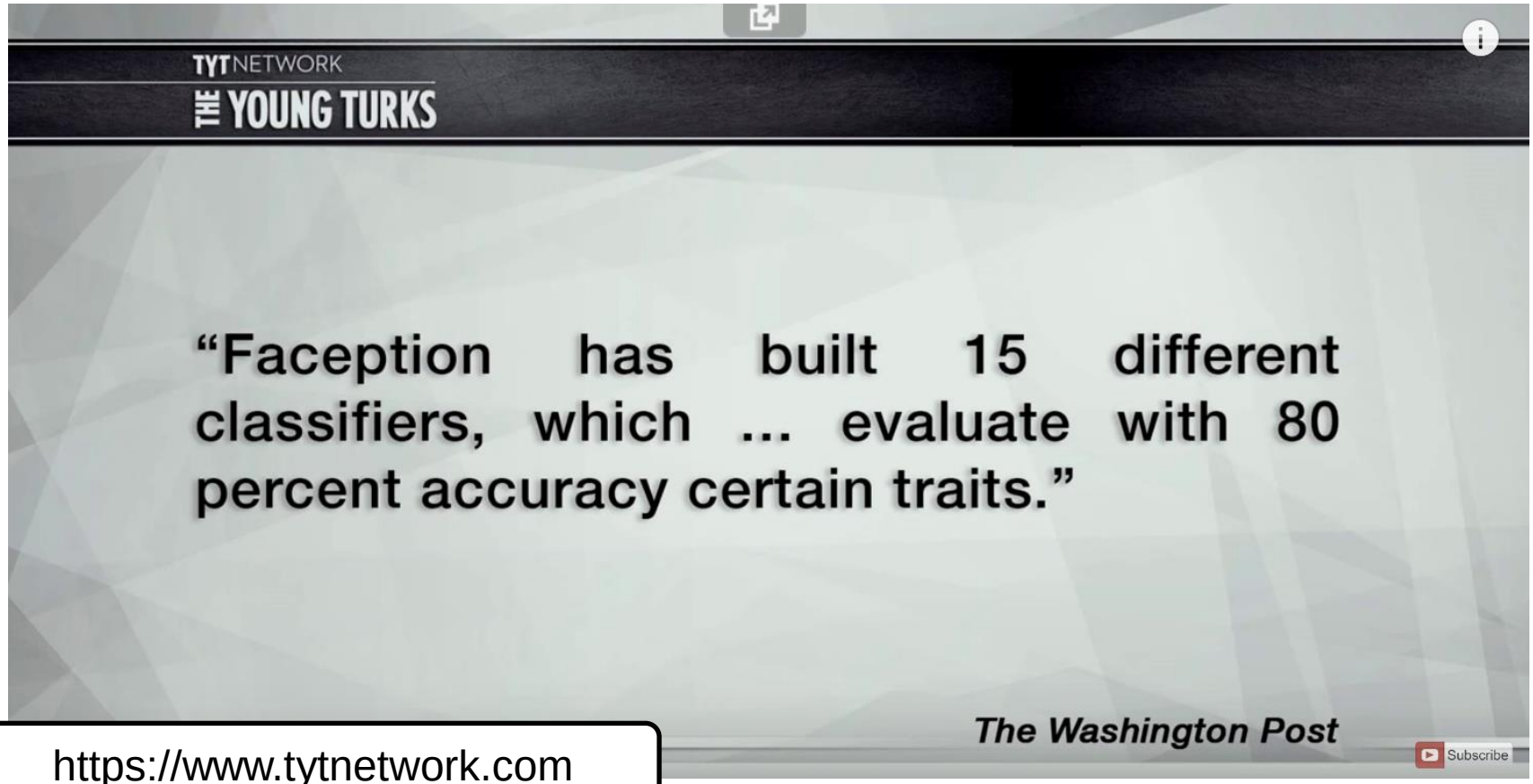
Rechnen mit dem Satz von Bayes

– Für welche „Alltagsphänomene“ ist der Satz von Bayes von Bedeutung?

  – Warum werde keine flächendeckenden HIV-Tests durchgeführt?
  – Warum gibt es in der Terrorbekämpfung so viele Fehlalarme?
  – und, und, und…



Wie viele „false positives“ generiert eine Anti-Terror-Software mit 80% Treffergenauigkeit?



https://www.tytnetwork.com

Übung: Rechnen mit dem Satz von Bayes

– Ein Unternehmen stellt Spritzgussteile auf zwei verschiedenen Maschinen her, wobei 70% der Teile auf Maschine X und 30% der Teile auf Maschine Y produziert werden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fertigungsfehler liegt bei Maschine X bei 10%, bei Maschine Y dagegen bei 20%

  – Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Produktionsfehler?
  – Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein entdeckter Produktionsfehler auf Maschine Y zurückführen lässt?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Additionssatz

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) * P(A_i)}{P(B)}$$

Satz von Bayes

Übung: Rechnen mit dem Satz von Bayes

- Ein Unternehmen stellt Spritzgussteile auf zwei verschiedenen Maschinen her, wobei 70% der Teile auf Maschine X und 30% der Teile auf Maschine Y produziert werden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fertigungsfehler liegt bei Maschine X bei 10%, bei Maschine Y dagegen bei 20%
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Produktionsfehler?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = (0{,}7 * 0{,}1) + (0{,}3 * 0{,}2) = 0{,}13$$

  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein entdeckter Produktionsfehler auf Maschine Y zurückführen lässt?

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) * P(A_i)}{P(B)} = \frac{(0{,}3 * 0{,}2)}{(0{,}7 * 0{,}1) + (0{,}3 * 0{,}2)} = 0{,}4615$$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

▲ Hochschule Harz

Hochschule für angewandte Wissenschaften

Christian Reinboth

Telefon +49 3943 – 896

Telefax +49 3943 – 5896

E-Mail creinboth@hs-harz.de

Friedrichstraße 57 – 59

38855 Wernigerode